0001340819568999

東京学芸大学

2013年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 座標平面上に，点A(0, -2)と円C : $x^2+(y-2)^2=4$がある．円C上の点Pに対し，線分APの中点をM，Mを通りAPに垂直な直線をℓとする．下の問いに答えよ．

(1) 点Pが円C上を動くとき，点Mの軌跡を求めよ．

(2) 直線ℓが円Cに接するとき，点Mの座標を求めよ．

(3) 点Pが円C上を動くとき，直線ℓが通る点全体の領域を求め，図示せよ．

(1) 点P(s, t)とおくと円C上の点より

$s^2+(t-2)^2=4 \quad \cdots ①$

また点M(X, Y)とおくと，

$$\begin{cases} X=\dfrac{s}{2} \\ Y=\dfrac{t-2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} s=2X & \cdots ② \\ t=2Y+2 & \cdots ③ \end{cases}$$

①に②,③を代入して．$4X^2+4Y^2=4 \quad \therefore X^2+Y^2=1$

よって，求める軌跡は，原点を中心とする半径1の円 //

(2) AP : $(t+2)x-sy-2s=0$

$\therefore\ \ell : s\left(x-\dfrac{s}{2}\right)+(t+2)\left(y-\dfrac{t-2}{2}\right)=0 \iff \ell : sx+(t+2)y-\dfrac{s^2}{2}-\dfrac{t^2}{2}+2=0$

円Cの中心は$(0, 2)$ 半径は2 ∴点と直線のキョリ公式より

$$2=\frac{\left|2(t+2)-\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{2}+2\right|}{\sqrt{s^2+(t+2)^2}}$$

①よりsを消去して2乗して整理すると．$\sqrt{1+2t}=\dfrac{3}{2} \quad \therefore t=\dfrac{5}{8},\ s=\pm\dfrac{3\sqrt{15}}{8}$

このとき．M$\left(\pm\dfrac{3\sqrt{15}}{16}, -\dfrac{11}{16}\right)$ //

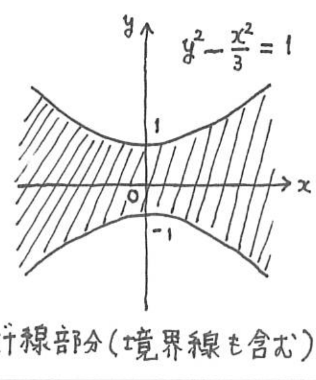
(3) $\ell : Xx+(Y+2)y-2Y-1=0 \iff \ell : xX+(y-2)Y+2y-1=0 \quad \cdots ④$

と表せるので，$X^2+Y^2=1 \quad \cdots ⑤$

④かつ⑤となる(X, Y)が存在する $\iff \dfrac{|2y-1|}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} \leqq 1$ かつ $x^2+(y-2)^2 \neq 0$

$\iff y^2-\dfrac{x^2}{3} \leqq 1 \quad ((x, y) \neq (0, 2))$

$\iff y^2-\dfrac{x^2}{3} \leqq 1$



上図の斜線部分(境界線も含む)