東京女子大学

2015年 現代教養 第4問

数理 石井K

4 空間のベクトル $\vec{n}=(1,\ -1,\ 1)$，$\vec{a}=(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ 0)$ に対し，以下の設問に答えよ．

(1) $\vec{n}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$|\vec{b}|=1$ をみたすベクトル $\vec{b}$ を1つ求めよ．

(2) (1)で求めた $\vec{b}$ に対し，$\vec{n}\cdot\vec{c}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，$|\vec{c}|=1$ をみたすベクトル $\vec{c}$ を1つ求めよ．

(3) s，t を実数とし，(1)と(2)で求めた $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて $\vec{p}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおく．$|\vec{p}|=1$ であるとき，$|\vec{p}-\vec{a}|$ の最小値を求めよ．また，そのときの $\vec{p}$ を求めよ．

(1) $\vec{x}=(2,1,-1)$ とおくと，

$\vec{n}\cdot\vec{x}=2-1-1=0$，$\vec{a}\cdot\vec{x}=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+0=0$

$\therefore\ \vec{b}=\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}=\underline{\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)}$ //

(2) $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ とおく

$\vec{n}\cdot\vec{y}=0$ のとき，$y_1-y_2+y_3=0$ …①

$\vec{b}\cdot\vec{y}=0$ のとき，$\dfrac{2}{\sqrt{6}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2-\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_3=0$ $\therefore\ 2y_1+y_2-y_3=0$ …②

①+② より，$y_1=0$ ∴このような $\vec{y}$ の例は，$\vec{y}=(0,1,1)$

$\therefore\ \vec{c}=\dfrac{\vec{y}}{|\vec{y}|}=\underline{\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ //

(3) $\vec{p}=s\vec{b}+t\vec{c}$ より，$|\vec{p}|^2=s^2|\vec{b}|^2+2st\,\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2|\vec{c}|^2$

ここで，$|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ より，$|\vec{p}|^2=s^2+t^2$ $\therefore\ s^2+t^2=1$ …③

$$|\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{a}|^2$$
$$=1-2\vec{a}\cdot\vec{p}+10$$
$$=11-2\vec{a}\cdot\vec{p}$$

ここで，$\vec{p}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}s,\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}s+\dfrac{1}{\sqrt{2}}t,\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}}s+\dfrac{1}{\sqrt{2}}t\right)$ より，$\vec{a}\cdot\vec{p}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}s-\dfrac{2}{\sqrt{3}}s-2t=-2t$

$\therefore\ |\vec{p}-\vec{a}|^2=11+4t$ ∴ $|\vec{p}-\vec{a}|^2$ の最小値は，$11-4=7$（$t=-1$ のとき）

∴③より，このとき，$s=0$

∴ $\underline{|\vec{p}-\vec{a}|\ \text{の最小値は}\ \sqrt{7},\ \vec{p}=\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ //