東京農工大学

2014年 第1問　1枚目／2枚　数理 石井K

1 r，s は実数で，$r>0$ とする．O を原点とする座標空間に 4 点 A(2, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)，D(r, r, r) がある．さらに，点 E を，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ が

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

で定まる点とする．次の問いに答えよ．

(1) O，A，B，C を通る球面の中心を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ が成り立つとき，s を r の式で表せ．
(3) (2) の条件 $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ を満たし，さらに $|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|=r$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}<0$ を満たすような r の値を求めよ．

(1) F(x, y, z) とおくと，

$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|$ (＝半径) より．$x^2+y^2+z^2=(x-2)^2+y^2+z^2$

$\therefore x=1$

$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BF}}|$ (＝半径) より．$x^2+y^2+z^2=x^2+(y-1)^2+z^2$

$\therefore y=\frac{1}{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CF}}|$ (＝半径) より．$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(z-1)^2$

$\therefore z=\frac{1}{2}$

$\therefore$ F$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ で，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OF}}|}=\frac{r+\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}r}{\sqrt{3}r\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}=\underline{\frac{2\sqrt{2}}{3}}_{//}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2, 1, 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2, 0, 1)$ であるから．$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(2-4s, s, s)$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{DE}}=(2-4s-r, s-r, s-r)$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-4+8s+2r+s-r=9s+r-4$$

$\therefore 9s+r-4=0$　$\therefore \underline{s=\frac{4-r}{9}}_{//}$

0001867722318999

数理 石井K

$\boxed{1}$ r，s は実数で，$r>0$ とする．O を原点とする座標空間に 4 点 A(2, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)，D(r, r, r) がある．さらに，点 E を，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ が

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

で定まる点とする．次の問いに答えよ．

(1) O，A，B，C を通る球面の中心を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ が成り立つとき，s を r の式で表せ．
(3) (2) の条件 $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ を満たし，さらに $|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|=r$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}<0$ を満たすような r の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ のとき．(2) より $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\left(\frac{2-5r}{9},\ \frac{4-10r}{9},\ \frac{4-10r}{9}\right)$ となる．

$$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{DE}}|=\frac{|2-5r|}{9}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}$$

$$=\frac{1}{3}|2-5r| \quad \cdots ①$$

また，
$$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}-|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$$
$$=r-3r^2$$

$\therefore\ r(1-3r)<0$ となり，$r>0$ より，$r>\frac{1}{3}$ $\cdots ②$

(i) $\frac{1}{3}<r<\frac{2}{5}$ のとき．

$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|=r$ と ① より．$\frac{1}{3}(2-5r)=r$

$\therefore\ r=\frac{1}{4}$　これは $\frac{1}{3}<r<\frac{2}{5}$ をみたさず不適．

(ii) $r\geqq\frac{2}{5}$ のとき．

$\frac{1}{3}(5r-2)=r$　$\therefore\ r=1$　これは $r\geqq\frac{2}{5}$ をみたす．

(i)，(ii) より．条件をみたす r は．$\underline{r=1}$ //