東京農工大学

数理 石井K

2015年 第3問

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-x}x^2(x^2 + ax + b)$$

で定める．ただし，a，b は実数，e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする．$f(-1) = 10e$，$f'(1) = 0$ のとき，a，b の値を求めよ．

(2) a，b を (1) で求めた値とする．このとき $x \geqq 0$ における $f(x)$ の最大値，最小値を求め，そのときの x の値を求めよ．ただし，$2 < e < 3$ であることを用いてよい．

(1) $f(x) = e^{-x}(x^4 + ax^3 + bx^2)$ より．

$f'(x) = -e^{-x}(x^4 + ax^3 + bx^2) + e^{-x}(4x^3 + 3ax^2 + 2bx)$

$\therefore$ $f'(1) = 0$ より． $-\frac{1}{e}(1 + a + b) + \frac{1}{e}(4 + 3a + 2b) = 0$

$\therefore$ $2a + b = -3$ $\cdots$ ①

また，$f(-1) = 10e$ より． $e(1 - a + b) = 10e$ $\therefore$ $a - b = -9$ $\cdots$ ②

① + ② より． $3a = -12$ $\therefore$ $\underline{a = -4,\ b = 5}$ //

(2) (1) のとき． $f(x) = e^{-x}x^2(x^2 - 4x + 5)$

$f'(x) = e^{-x}(-x^4 + 8x^3 - 17x^2 + 10x)$

$= -x(x-1)(x-2)(x-5)e^{-x}$

$f(0) = 0$，$f(1) = \frac{2}{e}$，$f(2) = \frac{4}{e^2}$，$f(5) = \frac{250}{e^5}$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	$\frac{4}{e^2}$	↗	$\frac{250}{e^5}$	↘

どちらが大きいか調べる

また，$x \geqq 0$ において． $f(x) = e^{-x} \cdot x^2 \cdot \{(x-2)^2 + 1\} \geqq 0$

また，$f(1) = \underbrace{\frac{2}{e} < 1}_{2<e<3\text{より}}$，$f(5) = \underbrace{\frac{250}{e^5} > \frac{250}{3^5}}_{2<e<3\text{より．}} = \frac{250}{243} > 1$ $\therefore$ $f(1) < f(5)$

$\therefore$ $\underline{\text{最大値は } \frac{250}{e^5}\ (x = 5\text{ のとき})\text{，最小値は } 0\ (x = 0\text{ のとき})}$ //