

2016年第3問

3 a を正の実数とし、 x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-ax} \tan^2 x \quad \left(-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\right)$$

で定める。ただし、 e は自然対数の底とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする。 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ が成り立つとき、 a の値を求めよ。

(2) $f'(x) = 0$ かつ $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ を満たす x がちょうど 3 個存在するように、定数 a の値の範囲を定めよ。

(3) a の値が (2) で定めた範囲にあるとする。このとき、方程式 $f'(x) = 0$ の解を x_1, x_2, x_3 ($-\frac{\pi}{3} < x_1 < x_2 < x_3 < \frac{\pi}{3}$) とし、

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad y_3 = f(x_3)$$

とおく。

(i) y_1, y_2, y_3 を大きさの順に並べよ。

(ii) $\tan x_3$ を a の式で表せ。