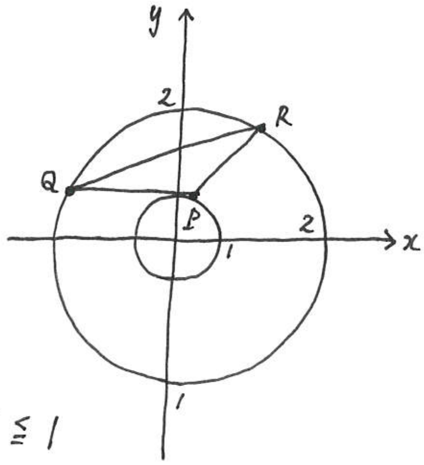
0001647722538999

東北大学

2014年 第4問

$\boxed{4}$ 不等式 $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4$ が表す xy 平面内の領域を D とする．P を円 $x^2+y^2=1$ 上の点，Q と R を円 $x^2+y^2=4$ 上の異なる2点とし，三角形 PQR は領域 D に含まれているとする．a，b を実数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す1次変換により P は P′，Q は Q′，R は R′ に移されるとする．このとき，三角形 P′Q′R′ が領域 D に含まれるための a，b の必要十分条件を求めよ．ただし，三角形は内部も含めて考えるものとする．

$A=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$ より．



$A=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ と表せる．

∴ $P' \subset D$ の必要十分条件は．$1 \leqq \sqrt{a^2+b^2} \leqq 2$

同様に Q'，$R' \subset D$ の必要十分条件は $\frac{1}{2} \leqq \sqrt{a^2+b^2} \leqq 1$

ともにみたすのは．$\sqrt{a^2+b^2}=1$ すなわち．$a^2+b^2=1$

このとき．A は原点を中心とする回転移動を表す行列であり．

$\triangle PQR$ と $\triangle P'Q'R'$ は合同となり．

$\triangle P'Q'R'$ は D に含まれる．

∴ 必要十分条件は $\underline{a^2+b^2=1}$ //