

2012年理工（物理・応用生物科・経営工）第2問

2 Oを原点とする座標平面において、点(1, 1)を点(5, 5)に、点(1, -7)を点(-3, 21)に移す1次変換を $f$ とする。 $f$ による点Pの像を点Qとすると、Pに対して内積の条件

$$\vec{OP} \cdot \vec{PQ} = 0 \quad (*)$$

を考える。

- (1)  $f$ を表す行列を求めよ。  
(2) 条件(\*)を満たす点 $P(x, y)$ の軌跡は2直線となる。この2直線の方程式を求めよ。

実数 $a \geq 0$ に対して、

「点 $(a, 0)$ を中心とする半径1の円周上の点Pで、条件(\*)を満たすものがちょうど2つある」 (\*\*)  
とする。この2点を $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ とすると、 $i = 1, 2$ に対して、 $P_i$ の $f$ による像を $Q_i$ とし、 $\triangle OP_iQ_i$ の面積を $S_i$ とする。

- (3) 上の条件(\*\*)を満たす $a$ の値の範囲を求めよ。  
(4)  $S_i$ を $y_i$ を用いて表せ。また、和 $S_1 + S_2$ の値を $a$ を用いて表せ。