

2012年 理工（数・建築・電気電子情報工）第1問

1 次の文章中の から までに当てはまる数字0~9を求めよ。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(1) a を実数とするとき、方程式

$$|x| - |x^2 - 4| + |x + 6| = a$$

を考える。この方程式の実数解が2個であるための条件は

$$a < \text{ア}, \quad \text{イ} < a < \text{ウ} \text{ エ}$$

であり、実数解を持たないための条件は

$$a > \text{オ} \text{ カ}$$

である。また、次の不等式

$$|x| - |x^2 - 4| + |x + 6| > 2$$

には、正の整数解が 個、負の整数解が 個ある。

(2) 空間内に点 O, A, B, C があり、 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ とおくとき、それぞれの大きさや内積が

$$|\vec{a}| = 9, \quad |\vec{b}| = 12, \quad |\vec{c}| = \sqrt{42},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 72, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 57, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 48$$

であるとする。 \vec{AB} と \vec{AC} のなす角は $\frac{1}{\text{ケ}}\pi$ であり、 $\triangle ABC$ の面積は $\frac{\text{コ} \text{ サ}}{\text{シ}}$ である。ベクトル

$$\vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$$

が3点 A, B, C を通る平面と直交するのは $s = \frac{\text{ス}}{\text{セ}}$, $t = \frac{\text{ソ}}{\text{タ}}$ のときである。したがって、四面体 $OABC$ の体積は である。

(3) 三角関数についての等式

$$\text{テ} \cos^3 \theta - \text{ト} \cos \theta - \cos 3\theta = 0$$

を利用して、 t に関する3次方程式

$$\text{テ} t^3 - \text{ト} t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



を解いたとき、 $\cos \frac{3}{4}\pi$ が解の1つであることがわかる。したがって、この方程式の残りの2つの解は

$$\cos \frac{\boxed{\text{ナ}}}{12}\pi = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

と

$$\cos \frac{\boxed{\text{ノ}}}{12}\pi = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

となる。これより、

$$\tan \frac{\boxed{\text{ナ}}}{12}\pi = \boxed{\text{ハ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}$$

となる。