0002035364697999

東京理科大学

2015年 理（数理情報科） 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 実数 a, b に対して，$f(x)=x^2+ax+b$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする．

(a) M, m をそれぞれ以下の場合に分けて a, b を用いて表せ．

(i) $a \leqq -2$

(ii) $-2 < a < 2$

(iii) $2 \leqq a$

(b) $M-m$ が最小となるような a の値を求め，さらにそのときの $M-m$ の値を求めよ．

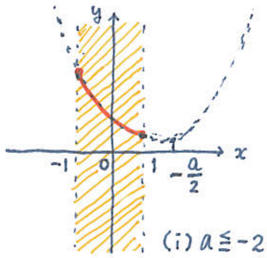
(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値が最小となるような a, b の値を求め，さらにそのときの $|f(x)|$ の最大値を求めよ．

(1) $f(x) = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$

(a) (i) $a \leqq -2$ のとき.

右図より, $M = f(-1) = 1-a+b$, $m = f(1) = 1+a+b$

$\therefore M-m = -2a$



(i) $a \leqq -2$

(ii) $-2<a<2$ のとき.

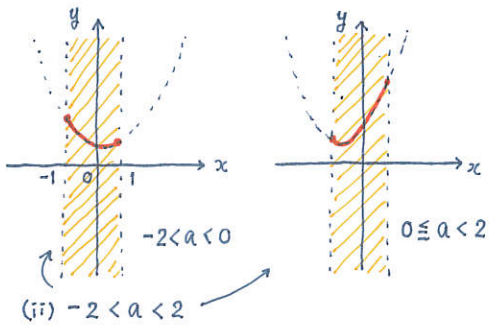
右図より, $-2<a<0$ のとき $M = f(-1) = 1-a+b$

$0 \leqq a < 2$ のとき $M = f(1) = 1+a+b$

あわせると, $M = 1+|a|+b$

$m = -\frac{a^2}{4} + b$

$\therefore M-m = \frac{a^2}{4} + |a| + 1$

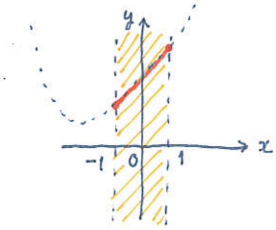


(ii) $-2<a<2$

(iii) $2 \leqq a$ のとき.

右図より. $M = f(1) = 1+a+b$, $m = f(-1) = 1-a+b$

$\therefore M-m = 2a$



(b) (i)のとき. $M-m$ の最小値は 4 ($a=-2$ のとき)

(iii)のとき $M-m$ の最小値は 4 ($a=2$ のとき).

$-2<a<0$ のとき. $M-m = \frac{a^2}{4} - a + 1 = \frac{1}{4}(a-2)^2$ ∴最小値はなし

$0<a<2$ のとき. $M-m = \frac{a^2}{4} + a + 1 = \frac{1}{4}(a+2)^2$ ∴最小値は 1 ($a=0$ のとき)

以上より. $M-m$ の最小値は 1 ($a=0$ のとき) //

東京理科大学

2015年 理（数理情報科） 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

2　実数 a, b に対して，$f(x)=x^2+ax+b$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする．

(a) M, m をそれぞれ以下の場合に分けて a, b を用いて表せ．

(i) $a \leqq -2$

(ii) $-2 < a < 2$

(iii) $2 \leqq a$

(b) $M-m$ が最小となるような a の値を求め，さらにそのときの $M-m$ の値を求めよ．

(2) $-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値が最小となるような a, b の値を求め，さらにそのときの $|f(x)|$ の最大値を求めよ．

(2) $|f(x)|$ の最大値は $|M|$ と $|m|$ の小さくない方になる．

(1)(b) より $M-m \geqq 1$ なので，$|M| \geqq \frac{1}{2}$ または $|m| \geqq \frac{1}{2}$

(∵ $|M| < \frac{1}{2}$ かつ $|m| < \frac{1}{2}$ と仮定すると．
$M-m \leqq |M|+|m| < 1$ となり $M-m \geqq 1$ に矛盾する)

よって．$|f(x)| \geqq \frac{1}{2}$

等号成立は．$M-m=1$　∴ (1)(b) より．$a=0$

このとき．$M=\frac{1}{2}$，$m=-\frac{1}{2}$ であるから．

$M=1+b=\frac{1}{2}$，$m=b=-\frac{1}{2}$

∴ $b=-\frac{1}{2}$

以上より．$a=0$，$b=-\frac{1}{2}$ のとき．$|f(x)|$ の最大値は最小となり．その値は $\frac{1}{2}$ //