

2012年理工（数・建築・電気電子情報工）第3問

3 自然数  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し,  $x > 0$  で定義された関数  $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = \frac{\log x}{x^n} \quad (x > 0)$$

で定める. ただし,  $\log$  は自然対数を表す.

$t > 1$  とするとき, 座標平面において曲線  $y = f_n(x)$  の  $x \leq t$  の部分,  $x$  軸, 直線  $x = t$  の3つで囲まれている図形の面積を  $S_n(t)$  とする. また, 4点  $(1, 0)$ ,  $(t, 0)$ ,  $(t, f_n(t))$ ,  $(1, f_n(t))$  を頂点とする長方形の面積を  $T_n(t)$  とする.

- (1) 関数  $f_n(x)$  が極大となるときの  $x$  の値と, そのときの  $f_n(x)$  の極大値を求めよ.
- (2)  $t$  が  $t > 1$  を動くとき,  $T_n(t) - S_n(t)$  が最大となる  $t$  の値を求めよ.
- (3)  $S_1(t)$  と  $S_n(t)$  ( $n \geq 2$ ) を求めよ.
- (4) 各  $n \geq 2$  に対して  $T_n(t) = S_n(t)$  となる  $t$  ( $t > 1$ ) がただ1つあることを示せ. ただし,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  となることを用いてもよい.