

2015年理工(数・建築・電気電子情報工)第3問

3 以下の問いに答えよ。(nは自然数とする.)

(1) $x = a \tan \theta$ とおくことにより, 定積分

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$$

を求めよ.

(2) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{n}{4n^2 + k^2}$$

を求めよ.

(3) 以下の問いに答えよ.

(i) 実数 $x \geq 0$ に対して

$$\frac{1}{1+x^2} - x^{2n+2} \leq 1 + \sum_{k=1}^n (-x^2)^k \leq \frac{1}{1+x^2} + x^{2n+2}$$

を示せ.

(ii) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

により定める. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.