鳥取大学

2015年 地域 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 点Oを原点とする座標空間において，4点O，A(2, 0, 0)，B(1, 2, 0)，C(1, 1, 2)を頂点とする四面体がある．点Oから平面ABCに垂線OHを下ろし，直線AHと直線BCの交点をPとする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 実数s，t，uを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$とおくとき，$s$，$t$，$u$を求めよ．

(2) 線分BPと線分PCの長さの比BP : PCを求めよ．

(3) 線分APの長さを求めよ．

(1) OH ⊥ 平面ABCより，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$　よって，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(2s+t+u,\ 2t+u,\ 2u)\cdot(-1,2,0)=-2s+3t+u$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=(2s+t+u,\ 2t+u,\ 2u)\cdot(-1,1,2)=-2s+t+4u$

$\therefore\ -2s+3t+u=0\ \cdots$ ①，$-2s+t+4u=0\ \cdots$ ②

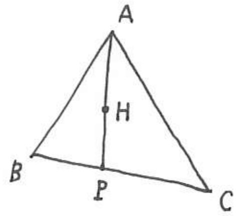
① − ② より，$t=\frac{3}{2}u$，$s=\frac{11}{4}u$

$\therefore\ \overrightarrow{OH}=(8u,\ 4u,\ 2u)$　$\therefore\ \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=(8u-2,\ 4u,\ 2u)$

点Hは平面ABC上の点より，$\overrightarrow{AH}=v\overrightarrow{AB}+w\overrightarrow{AC}$ と表せる

$(8u-2,\ 4u,\ 2u)=(-v-w,\ 2v+w,\ 2w)$

各成分を比較して，$w=u$，$v=\frac{3}{2}u$，$u=\frac{4}{21}$



$\therefore\ \underline{s=\frac{11}{21},\ t=\frac{2}{7},\ u=\frac{4}{21}}$ //

(2) (1)より，$\overrightarrow{AH}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{21}\overrightarrow{AC}=\frac{10}{21}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{10}{21}\overrightarrow{AP}$

$\therefore\ \underline{\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=2:3}$ //

(3) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{5}$，$|\vec{c}|=\sqrt{6}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=2$

(2)より，$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=-\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

$$\therefore\ |\overrightarrow{AP}|^2=|\vec{a}|^2+\frac{9}{25}|\vec{b}|^2+\frac{4}{25}|\vec{c}|^2-\frac{6}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{4}{5}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{12}{25}\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$=4+\frac{9}{5}+\frac{24}{25}-\frac{12}{5}-\frac{8}{5}+\frac{36}{25}$$
$$=\frac{21}{5}$$

$\therefore\ \underline{|\overrightarrow{AP}|=\frac{\sqrt{105}}{5}}$ //