鳥取大学

2015年医（医）第3問

数理石井K

$\boxed{3}$ xy 平面上の第1象限内の2つの曲線 $C_1 : y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ と $C_2 : y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ を考える．次の問いに答えよ．ただし，a は正の実数とする．

(1) $x = a$ における C_1 の接線 L_1 の方程式を求めよ．

(2) C_2 の接線 L_2 が (1) で求めた L_1 と直交するとき，接線 L_2 の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた L_2 が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ A，B とする．折れ線 AOB の長さ l を a の関数として求め，l の最小値を求めよ．ここで，O は原点である．

(1) C_1 において，$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ また接点は $(a, \sqrt{a})$ であるから，接線は

$y = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x - a) + \sqrt{a}$　　すなわち，$\underline{L_1 : y = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}x + \dfrac{\sqrt{a}}{2}}$ //

(2) $L_1 \perp L_2$ より，L_2 の傾きは，$-2\sqrt{a}$ である．

C_2 において，$y' = -\dfrac{1}{x^2}$ より，$-2\sqrt{a} = -\dfrac{1}{x^2}$　　$x > 0$ より $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{a}}$

∴ 接点は $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{a}}, \sqrt{2}\sqrt[4]{a}\right)$

このとき接線は，$y = -2\sqrt{a}\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{a}}\right) + \sqrt{2}\sqrt[4]{a}$　　∴ $\underline{L_2 : y = -2\sqrt{a}\,x + 2\sqrt{2}\sqrt[4]{a}}$ //

(3) $y = 0$ を代入して，$0 = -2\sqrt{a}\,x + 2\sqrt{2}\sqrt[4]{a}$　　∴ $x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{a}}$　　∴ $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{a}}, 0\right)$

$x = 0$ を代入して，$B\left(0, 2\sqrt{2}\sqrt[4]{a}\right)$

$\angle AOB = 90^\circ$ より，$l = \underbrace{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{a}}}_{>0} + \underbrace{2\sqrt{2}\sqrt[4]{a}}_{>0} \geqq 2\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{a}}\cdot 2\sqrt{2}\sqrt[4]{a}} = 4$

相加・相乗平均の関係

また，等号成立は，$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{a}} = 2\sqrt{2}\sqrt[4]{a} \iff a = \dfrac{1}{4}$

∴ $\underline{l\ \text{の最小値は}\ 4\ \left(a = \tfrac{1}{4}\ \text{のとき}\right)}$ //