鳥取大学

2015年 医（医） 第4問

$\boxed{4}$ 連続関数 $f(x)$ は次の条件を満たす.

$$f(x) = 1 + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\phi(x) = f(x) + f'(x)$ とおくとき，$\dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)}$ を求めよ.
(2) $f(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = 1 + x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt$

$\therefore f'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + xf(x) - xf(x)$

$= \int_0^x f(t)\,dt$

$\therefore f''(x) = f(x)$

$\therefore \dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \dfrac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}$

$= \dfrac{f'(x)+f(x)}{f(x)+f'(x)}$

$= \underline{1}$ //

(2) (1) より,

$\int \dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)}\,dx = \int 1\cdot dx$

$\therefore \log|\phi(x)| = x + C$

$\therefore \phi(x) = \pm C' \cdot e^x$ （$C' = e^C$ とおいた）

$\phi(0) = f(0) + f'(0) = 1$ より, $\pm C' = 1$ $\therefore \phi(x) = e^x$

$(e^x f(x))' = e^x f(x) + e^x f'(x)$

$= e^x \phi(x)$

$= e^{2x}$

$\therefore e^x f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + D$ （D：積分定数）

$f(0) = 1$ より, $D = \frac{1}{2}$

$\therefore e^x f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x}+1)$

$\therefore \underline{f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}$ //