2015年 都市教養（理系） 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

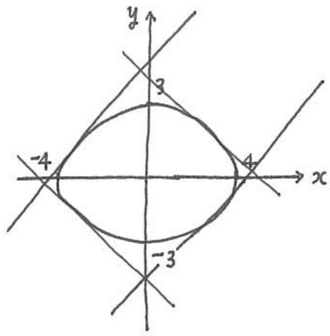
$\boxed{3}$ 座標平面において楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ を C とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) C に接する傾き m の直線の方程式をすべて求めなさい．

(2) すべての辺が C に接する長方形の1辺の傾きが m であるとする．この長方形の面積 $S(m)$ を求めなさい．

(3) m がすべての実数を動くとき，(2) で求めた $S(m)$ の最大値を求めなさい．

(1) 直線を $y=mx+a$ とおくと



直線が C に接する $\Longleftrightarrow$ 方程式 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(mx+a)^2}{9}=1$ が重解をもつ

$$9x^2+16(m^2x^2+2max+a^2)-144=0$$

$\therefore$ $(9+16m^2)x^2+32max+16a^2-144=0$ の判別式を D とすると，

$$D/4=(16ma)^2-(9+16m^2)(16a^2-144)$$

$$=16(16m^2a^2-9a^2-16m^2a^2+81+144m^2)$$

$\therefore D/4=0$ より， $9a^2=81+144m^2$ 　 $\therefore a=\pm\sqrt{9+16m^2}$

$\therefore$ 求める直線は， $\underline{y=mx\pm\sqrt{16m^2+9}}$ //

(2) (1) で求めた直線と原点とのキョリ d は，点と直線のキョリ公式より

$$d=\frac{\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}\ \cdots ①$$

また，長方形のもう片方の辺の傾きは $-\dfrac{1}{m}$ となるので，これらと原点とのキョリ d' は

① の m に $-\dfrac{1}{m}$ を代入して，

$$d'=\frac{\sqrt{\frac{16}{m^2}+9}}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}}=\frac{\sqrt{9m^2+16}}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\therefore\ S(m)=2d\times 2d'$$

$$=4\cdot\sqrt{\frac{16m^2+9}{m^2+1}}\cdot\sqrt{\frac{9m^2+16}{m^2+1}}$$

$$=\underline{\frac{4}{m^2+1}\cdot\sqrt{(16m^2+9)(9m^2+16)}}\ //$$

$m=0$ のときは，$S(0)=48$ であり

$m=0$ のときもみたしている．

2015年 都市教養（理系） 第3問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標平面において楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ を C とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) C に接する傾き m の直線の方程式をすべて求めなさい．

(2) すべての辺が C に接する長方形の1辺の傾きが m であるとする．この長方形の面積 $S(m)$ を求めなさい．

(3) m がすべての実数を動くとき，(2) で求めた $S(m)$ の最大値を求めなさい．

(3) (2)より $S(m)=4\cdot\sqrt{\dfrac{(16m^2+9)(9m^2+16)}{(m^2+1)^2}}$

ここで，$m^2=x$ とおくと，$(x \geqq 0)$

$$\left\{\frac{S(m)}{4}\right\}^2=\frac{(16x+9)(9x+16)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{144(x+1)^2+49x}{(x+1)^2}$$

$$=144+\frac{49x}{(x+1)^2}$$

ここで，$f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ $(x \geqq 0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1-x}{(x+1)^3}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

$\therefore$ $f(x)$ の最大値は $\dfrac{1}{4}$ ($x=1$ のとき)

$\therefore$ $\left\{\dfrac{S(m)}{4}\right\}^2$ の最大値は，$\dfrac{625}{4}$ ($m=\pm1$ のとき)

$\therefore$ $S(m)$ の最大値は 50 ($m=\pm1$ のとき)