2015年 第2問

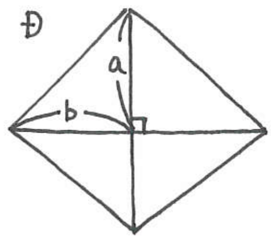
$\boxed{2}$ ひし形 D の2つの対角線の長さを $2a$, $2b$ とする．D と同じ周の長さ，および同じ面積をもつ長方形を R とし，その2辺の長さを x, y $(x \leqq y)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

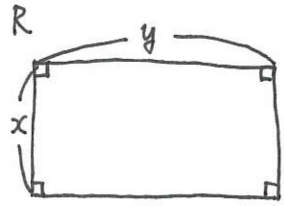
(1) D の周の長さ s を a, b を用いて表せ．

(2) x, y を a, b を用いて表せ．

(3) R の対角線の長さ l と $a+b$ の大小を比較せよ．

(4) a, b が $s=4$ を満たしながら動くとき，l のとりうる値の範囲を求めよ．





(1) 三平方の定理より．

$\underline{s = 4\sqrt{a^2+b^2}}$ //

(2) 長方形の周の長さは．$2(x+y)$ であるから．

(1)より．$2(x+y) = 4\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore\ x+y = 2\sqrt{a^2+b^2}$ $\cdots$ ①

また，D と R の面積が等しいので

$\frac{1}{2}\cdot 2a \cdot 2b = xy$ $\quad\therefore\ xy = 2ab$ $\cdots$ ②

①，②と解と係数の関係より．

x, y は方程式 $t^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}\cdot t + 2ab = 0$ の解である．

解の公式から．$t = \sqrt{a^2+b^2} \pm \sqrt{(a-b)^2}$

$\therefore\ x \leqq y$ より．$\underline{x = \sqrt{a^2+b^2} - |a-b|,\ y = \sqrt{a^2+b^2} + |a-b|}$ //

(3) $l = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{(x+y)^2 - 2xy}$

$= \sqrt{4(a^2+b^2) - 4ab}$

$= 2\sqrt{a^2 - ab + b^2}$

$\therefore\ l^2 - (a+b)^2 = 4a^2 - 4ab + 4b^2 - a^2 - 2ab - b^2$

$= 3(a-b)^2$

$\geqq 0$

したがって．$\underline{l \geqq a+b}$ // (等号成立は $a=b$ のとき)

(4) $s=4$ のとき．$a^2+b^2=1$ より．$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ と表せる．

$\therefore\ l = 2\sqrt{\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin 2\theta}$ $\quad\therefore\ \underline{\sqrt{2} \leqq l < 2}$ //