0000369900369999

富山大学

数理 石井K

2012年 第3問

$\boxed{3}$ 箱の中に，数字の1が書かれたカードと数字の2が書かれたカードが，それぞれ1枚ずつ入っている．この箱の中から1枚のカードを取り出し，数字を記録して箱に戻す．これを n 回繰り返したとき，記録された数字の和が3の倍数である確率を P_n とする．

(1) P_1，P_2 を求めよ．

(2) P_{n+1} を P_n を用いて表せ．

(3) P_n を n を用いて表せ．

(1) $\underline{P_1 = 0,\ P_2 = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}}$ //

(2) $n+1$ 回くり返したとき，和が3の倍数となるのは，

n 回目までの和が3で割ると1余る数で，$n+1$ 回目に2を取り出す．
n 回目までの和が3で割ると2余る数で，$n+1$ 回目に1を取り出す

の2つの場合であるから，

$$P_{n+1} = (1-P_n)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore \underline{P_{n+1} = -\frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}} \text{ //}$$

(3) $P_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_n - \frac{1}{3}\right)$

$\therefore$ 数列 $\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $P_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である．

$$\therefore P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \underline{P_n = \frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}} \text{ //}$$