富山大学

2016年 医学部 第1問　　1枚目/2枚　　数理 石井K

1 関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して，$h(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$ で定義される関数 $h(x)$ を $(f*g)(x)$ と書くことにする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $(f*g)(x)=(g*f)(x)$ が成り立つことを示せ．

(2) $g(x)=e^{-x}$ とし，関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$ を

$$f_1(x)=1-e^{-x},\quad f_n(x)=(f_{n-1}*g)(x)\quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定義する．

(i) 整数 n が2以上のとき，$f_n{}'(x)$ を $f_n(x)$, $f_{n-1}(x)$ を用いて表せ．

(ii) $h_n(x)=e^x f_n{}'(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくとき，3以上の整数 n に対して，$h_n{}'(x)$ を $h_{n-1}(x)$ を用いて表せ．

(iii) $h_n(x)$ を求めよ．

(1)
$$(f*g)(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$$
$$=\int_x^0 f(s)g(x-s)\cdot(-ds)$$
$$=\int_0^x g(x-s)f(s)\,ds$$
$$=(g*f)(x)\quad ▨$$

$s=x-t$ とおいて置換積分

$ds=-dt$,
t	$0\to x$
s	$x\to 0$

(2)(i)
$$f_n(x)=(f_{n-1}*g)(x)$$
$$=(g*f_{n-1})(x)$$
(1)より
$$=\int_0^x e^{-(x-t)}f_{n-1}(t)\,dt$$
$$=e^{-x}\int_0^x e^t f_{n-1}(t)\,dt\quad\cdots(*)$$

(*)の両辺を x で微分して,
$$f_n{}'(x)=-e^{-x}\int_0^x e^t f_{n-1}(t)\,dt+e^{-x}\cdot e^x f_{n-1}(x)$$
$$=-\int_0^x e^{-(x-t)}f_{n-1}(t)\,dt+f_{n-1}(x)$$
$$=-(f_{n-1}*g)(x)+f_{n-1}(x)$$
$$=-f_n(x)+f_{n-1}(x)$$

$\therefore\ \underline{f_n{}'(x)=-f_n(x)+f_{n-1}(x)}$ //

2枚目へつづく

2016年 医学部 第1問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して，$h(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$ で定義される関数 $h(x)$ を $(f*g)(x)$ と書くことにする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $(f*g)(x)=(g*f)(x)$ が成り立つことを示せ．

(2) $g(x)=e^{-x}$ とし，関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$ を

$$f_1(x)=1-e^{-x},\quad f_n(x)=(f_{n-1}*g)(x)\quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定義する．

(i) 整数 n が2以上のとき，$f_n{}'(x)$ を $f_n(x)$, $f_{n-1}(x)$ を用いて表せ．

(ii) $h_n(x)=e^x f_n{}'(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくとき，3以上の整数 n に対して，$h_n{}'(x)$ を $h_{n-1}(x)$ を用いて表せ．

(iii) $h_n(x)$ を求めよ．

(2)(ii)

(i)より，$h_n(x)=e^x(-f_n(x)+f_{n-1}(x))$

$$\begin{aligned}\therefore h_n'(x)&=e^x(-f_n(x)+f_{n-1}(x))+e^x(-f_n'(x)+f_{n-1}'(x))\\&=e^x f_n'(x)+e^x(-f_n'(x)+f_{n-1}'(x))\\&=e^x f_{n-1}'(x)\\&=\underline{h_{n-1}(x)}\ /\!/\end{aligned}$$

(iii) $\underbrace{h_n(0)}_{n\geqq 2\text{のとき}}=e^0 f_n'(0)$

$$\begin{aligned}&=\frac{d}{dx}\int_0^0 f_{n-1}(0-t)g(t)\,dt\\&=0\end{aligned}$$

また，$h_1(x)=e^x\cdot e^{-x}=1$ であるから，

$\therefore$ (ii)より，$h_2(x)=\int h_1(t)\,dt=x+C$

$h_2(0)=0$ より，$C=0$　$\therefore h_2(x)=x$

同様にして，$h_3(x)=\dfrac{x^2}{2}$，$h_4(x)=\dfrac{x^3}{2\cdot 3}$，$\cdots$，$h_n(x)=\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$$\therefore \underline{h_n(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}\ /\!/$$