



2014年工学部第4問

4 連続な関数 $f(x)$ が以下の関係式を満たすとき、次の問いに答えよ。

$$\int_a^x (x-t)f(t) dt = 2 \sin x - x + b$$

$$(1) x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt = 2 \sin x - x + b$$

ただし、 a, b は定数であり、 $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ である。

両辺 x で微分して

(1) $\int_a^x f(t) dt$ を求めよ。

$$\int_a^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = 2 \cos x - 1$$

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) 定数 a, b の値を求めよ。

$$\therefore \int_a^x f(t) dt = 2 \cos x - 1$$

(4) $\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^3 dx$ を求めよ。

(2) (1) で求めた式を x で微分して。 $f(x) = -2 \sin x$

(3) (1) で求めた式に $x = a$ を代入して。 $0 = 2 \cos a - 1$

$$0 \leq a \leq \frac{\pi}{2} \text{ より。 } a = \frac{\pi}{3}$$

$\frac{\pi}{2}$ の式に $x = a$ を代入して。 $2 \sin a - a + b = 0$

$$a = \frac{\pi}{3} \text{ より。 } \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + b = 0 \quad \therefore b = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (-2 \sin x)^3 dx &= -8 \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} dx \\ &= -2 \left[-3 \cos x + \frac{\cos 3x}{3} \right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \\ &= -2 \left(-3 + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$