



2012年 第4問

4 四面体 $OABC$ において、次が満たされているとする。

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA}$$

点 A, B, C を通る平面を α とする。点 O を通り平面 α と直交する直線と、平面 α との交点を H とする。

- (1) \vec{OA} と \vec{BC} は垂直であることを示せ。
- (2) 点 H は $\triangle ABC$ の垂心であること、すなわち $\vec{AH} \perp \vec{BC}$, $\vec{BH} \perp \vec{CA}$, $\vec{CH} \perp \vec{AB}$ を示せ。
- (3) $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 2$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA} = 1$ とする。このとき、 $\triangle ABC$ の各辺の長さおよび線分 OH の長さを求めよ。