

2016年工学部第4問

 数理  
石井K

4 座標平面上の曲線  $y^2 - 2x - 2 = 0$  と直線  $x + y = \frac{1}{2}$  で囲まれた図形を  $D$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 座標平面に  $D$  を図示せよ。
- (2)  $D$  の面積を求めよ。
- (3) 点  $P(x, y)$  が  $D$  の内部および境界線上を動くとき、 $3x + 2y$  の値がとりうる範囲を求めよ。

$$(1) y^2 - 2x - 2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}y^2 - 1$$

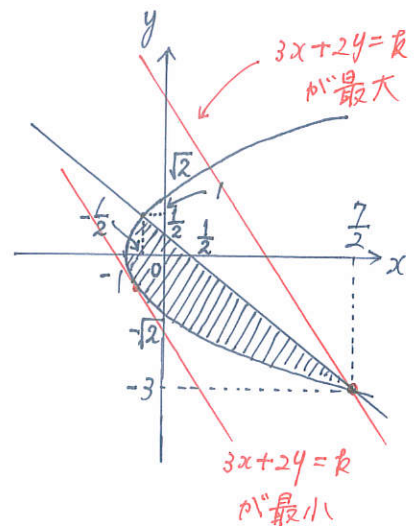
$$x = \frac{1}{2} - y \text{ を } y^2 - 2x - 2 = 0 \text{ に代入して}$$

$$\begin{aligned} y^2 - (1 - 2y) - 2 &= 0 \iff y^2 + 2y - 3 = 0 \\ &\iff (y + 3)(y - 1) = 0 \\ &\iff y = -3, 1 \end{aligned}$$

$\therefore$  曲線と直線の交点は  $(\frac{7}{2}, -3), (-\frac{1}{2}, 1)$

$\therefore D$  は右図の斜線部分

$$\begin{aligned} (2) S &= \int_{-3}^1 -y + \frac{1}{2} - (\frac{1}{2}y^2 - 1) dy \\ &= \int_{-3}^1 -\frac{1}{2}y^2 - y + \frac{3}{2} dy \\ &= \left[ -\frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}y \right]_{-3}^1 \\ &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \left( \frac{9}{2} - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$



(3)  $3x + 2y = k$  とおくと、 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{k}{2}$   $\therefore$  右上図のようになる。

$k$  が最大となるのは、点  $(\frac{7}{2}, -3)$  を通るときで、 $\frac{21}{2} - 6 = k \therefore k = \frac{9}{2}$

$k$  が最小となるのは、曲線と接するとき、 $\therefore x = -\frac{2}{3}y + \frac{k}{3}$  を代入して

$$\begin{aligned} y^2 + \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}k - 2 &= 0 \text{ が重解をもつとき、} \Delta = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}k - 2\right) = 0 \therefore k = -\frac{11}{3} \\ \therefore -\frac{11}{3} \leq k \leq \frac{9}{2} \end{aligned}$$