早稲田大学

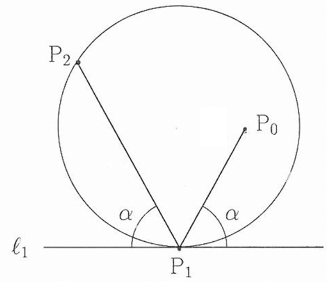
2012年 教育 第4問

$\boxed{4}$ 円Cとその内部の点P_0が与えられている．初めP_0にある動点が，円周上の点P_1まで線分P_0P_1上を動き，P_1からは，P_1における円Cの接線ℓ_1と線分P_0P_1のなす角がℓ_1と線分P_1P_2のなす角に等しくなるように向きを変えて，円周上の点P_2まで線分P_1P_2上を動く（図例1）．以下，自然数nについて，円周上の点P_nに至ったあとは，P_nにおける円Cの接線ℓ_nと線分$P_{n-1}P_n$のなす角がℓ_nと線分P_nP_{n+1}のなす角に等しくなるように向きを変え，円周上の点P_{n+1}まで線分P_nP_{n+1}上を動き，この動きをくり返す（図例2）．線分P_0P_1と接線ℓ_1のなす角をα $\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$とする．

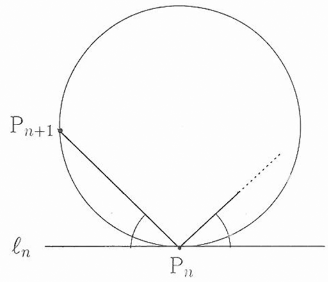
(1) $P_m = P_1$となる3以上の自然数mが存在するような角αをすべて決定せよ．

(2) 点P_1の位置によって角αは変化し得る．角αが最大となるP_1の位置，および最小となるP_1の位置を求めよ．

(3) $P_4 = P_1$となる点P_1がとれるような点P_0の存在範囲を求めよ．



図例1



図例2