早稲田大学

2014 年 教育 第 4 問

$\boxed{4}$ 2 個以上の正の整数を要素とする有限集合を A とする.

A のどの 2 数も一方が他方を割り切るとき A は良い集合であるといい，A のどの 2 数も互いに他を割り切らないとき A は悪い集合であるという.

また，A の良い部分集合の要素の個数の最大値，すなわち，

$$\max\left\{n(B) \mid B \subset A,\ n(B) \geqq 2 \text{ かつ } B \text{ は良い集合}\right\}$$

を A の最良数と定義し，A の悪い部分集合の要素の個数の最大値，すなわち，

$$\max\left\{n(B) \mid B \subset A,\ n(B) \geqq 2 \text{ かつ } B \text{ は悪い集合}\right\}$$

を A の最悪数と定義する.

たとえば，$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 14,\ 15,\ 77,\ 154,\ 225,\ 231,\ 308\}$ のとき，A の良い部分集合は $\{7,\ 77,\ 231\}$，$\{7,\ 14,\ 154,\ 308\}$，$\{11,\ 77,\ 154,\ 308\}$ などであり，A の最良数は 4 である．また，A の悪い部分集合は $\{231,\ 308\}$，$\{14,\ 15,\ 77\}$，$\{2,\ 7,\ 11,\ 15\}$，$\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$ などであり，A の最悪数は 5 である.

k を 2 以上の整数とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $n(A) = k^2$ で，かつ最良数も最悪数も k である集合 A が存在することを証明せよ.

(2) $n(A) \geqq k^2 + 1$ ならば，A の最良数または A の最悪数のどちらかは $k + 1$ 以上であることを証明せよ.

(3) 要素数が 2014 で，かつ最良数と最悪数が等しいような集合，すなわち，

$$n(A) = 2014 \quad \text{かつ} \quad (A \text{の最良数}) = (A \text{の最悪数})$$

を満たす集合 A を考える．このような集合たちの中で最良数が最小となる集合の例を挙げよ.