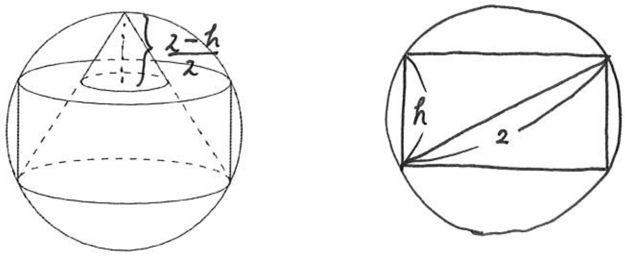
2014年 第2問

$\boxed{2}$ 図のように，円柱 E と直円錐 F が半径１の球に内接しており，さらに E と F の底面は一致している．このとき，次の問いに答えなさい．



(1) 円柱 E の高さを h とするとき，円柱 E の底面の半径と直円錐 F の高さを，それぞれ h を用いて表しなさい．

(2) 半径１の球に内接する円柱の体積の最大値を求めなさい．

(3) 円柱 E の体積と直円錐 F の体積が等しいとする．円柱 E から直円錐 F が重なっている部分をくり抜いたとき，くり抜かれて残った立体の体積を求めなさい．

(1) 右上の図と三平方の定理より．Eの底面の半径は．$\underline{\dfrac{\sqrt{4-h^2}}{2}}$ //

Fの高さは．$\dfrac{2-h}{2}+h=\underline{1+\dfrac{h}{2}}$ //

(2) 円柱の体積 V_1 は．$V_1=\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{4-h^2}}{2}\right)^2\times h=\dfrac{\pi}{4}\cdot h(4-h^2)$

$\therefore V_1(h)=-\dfrac{\pi}{4}h^3+h\pi \qquad \therefore V_1'(h)=-\dfrac{3}{4}\pi h^2+\pi$

$\therefore V_1'(h)=0$ となるのは．$h=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

h	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(2)
$V_1'(h)$		$+$	0	$-$	
$V_1(h)$		↗		↘	

$\therefore V_1(h)$ の最大値は．$V_1\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=\underline{\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi\ \left(h=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\text{のとき}\right)}$ //

(3) 円すいの体積 V_2 は．$V_2=\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{4-h^2}}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{3}\times\left(1+\dfrac{h}{2}\right)$

$V_1=V_2$ より．$h=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{h}{2}\right) \qquad \therefore h=\dfrac{2}{5}$

FがEからはみ出た部分の体積は．$\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{4-h^2}}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{3}\times\left(1+\dfrac{h}{2}\right)\times\left(\dfrac{1-\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}}\right)^3$

$h=\dfrac{2}{5}$ を代入すると，$\dfrac{128}{1125}\pi$

ここで，（FがEからはみ出た部分の体積）＝（EがFからはみ出た部分の体積）

より，$\underline{\dfrac{128}{1125}\pi}$ //