山口大学

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ kを正の実数とする．座標平面において，方程式$y=-x^2-2x-1$が表す放物線C_1および方程式$y=kx^2$が表す放物線C_2がある．このとき，次の問いに答えなさい．

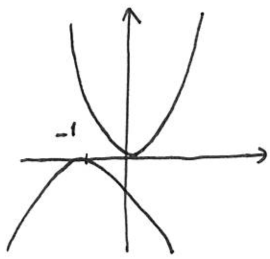
(1) 放物線C_1の接線であり，C_2の接線でもあるような直線は2つある．この2つの直線の方程式を求めなさい．

(2) (1)で求めた2つの直線の交点をPとする．kが正の実数の範囲を動くときのPの軌跡を求め，図示しなさい．

(1) 求める直線はy軸に平行ではないから $y=ax+b$ とおくと

$-x^2-2x-1-ax-b=0$ と $\underbrace{kx^2-ax-b}_{=0}$ はともに重解をもつ.

判別式をそれぞれD_1, D_2とすると,



$$\frac{D_1}{4}=\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-(b+1)=0 \qquad D_2=a^2+4kb=0$$

$$\frac{a^2}{4}+a+1-\left(\frac{-a^2}{4k}+1\right)=0$$

$$\therefore \frac{a^2}{4}+a+\frac{a^2}{4k}=0$$

$$(k+1)a^2+4ka=0 \qquad \therefore a=0,\ -\frac{4k}{k+1}$$

$$(a,b)=(0,0),\ \left(-\frac{4k}{k+1},\ -\frac{4k}{(k+1)^2}\right)$$

$$\therefore y=0 \text{ と } y=-\frac{4k}{k+1}x-\frac{4k}{(k+1)^2}$$

(2) $P\left(-\frac{1}{k+1},\ 0\right)=(X,Y)$ とおくと. $X<0$ であり.

$$X=-\frac{1}{k+1} \qquad \therefore k+1=-\frac{1}{X} \qquad k=-1-\frac{1}{X}$$

$$\therefore -1-\frac{1}{X}>0 \qquad \therefore \frac{1}{X}<-1 \qquad \therefore 1>-X \qquad \therefore X>-1$$

よって, x軸の ~~$x>-1$~~ の部分

$-1<X<0$