0001982097108999

# 横浜国立大学

2015年 理工 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 実数 $a$ に対し，$xy$ 平面上の放物線 $C: y=(x-a)^2-2a^2+1$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $a$ がすべての実数を動くとき，$C$ が通過する領域を求め，図示せよ．

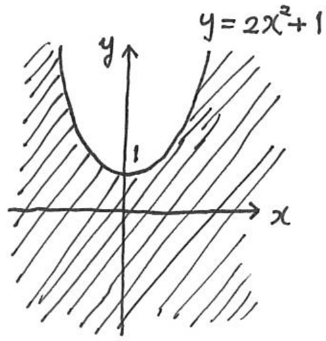
(2) $a$ が $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲を動くとき，$C$ が通過する領域を求め，図示せよ．

(1). $(x-a)^2-2a^2+1-y=0$ 展開して，$a$ についての降べきの順に並べると．

$$a^2+2xa-x^2-1+y=0$$

この方程式が実数解をもてばよいので，判別式を $D$ とおくと．

$$D/4 = x^2-(-x^2-1+y) \geqq 0 \iff y \leqq 2x^2+1$$

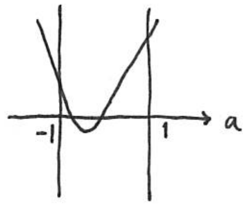



よって求める領域は右の斜線部分

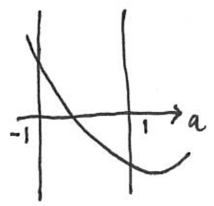
（ただし境界線も含む）

(2) (1)の条件 $y \leqq 2x^2+1 \cdots ①$ に加えて．

方程式 $a^2+2xa-x^2-1+y=0$ の解が $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲に解をもてばよい




(i) 2つの解(重解も含む)をもつとき




(ii) 1つの解をもつとき．

ここで，$f(a)=a^2+2xa-x^2-1+y$

とおく

(i)のとき．軸が $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲

かつ，$f(1) \geqq 0$

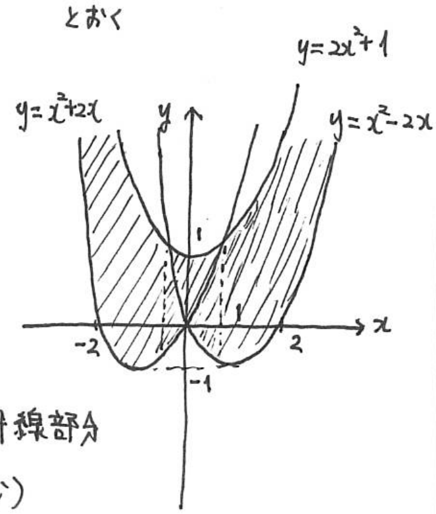
$\therefore -1 \leqq -x \leqq 1$ かつ $2x-x^2+y \geqq 0$

$\iff y \geqq x^2-2x$ かつ $-1 \leqq x \leqq 1$

(ii) $f(-1)\cdot f(1) \leqq 0$

よって，$(-2x-x^2+y)(2x-x^2+y) \leqq 0$

$$\iff \begin{cases} y \geqq x^2+2x \text{ かつ } y \leqq x^2-2x \\ \quad\text{または} \\ y \leqq x^2+2x \text{ かつ } y \geqq x^2-2x \end{cases}$$




よって右図の斜線部分

（境界線も含む）